Analysis und Lineare Algebra mit MuPAD Dehling/Kubach

Mögliche Themen für Abschlussprojekte

1 Fourier-Reihen

Theoretischer Hintergrund

Zu einer integrierbaren Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definieren wir die Fourier-Reihe

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x)),$$

wobei $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\cos(k\,x)\,dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\sin(k\,x)\,dx, \end{aligned}$$

für $k \geq 1$. Dies ist eine unendliche Reihe, deren Konvergenz noch zu klären ist. Wir definieren weiter die n-te Fourier-Summe

$$S_n(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x)).$$

Das Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe hängt von den Eigenschaften der Funktion f und vom verwendeten Konvergenzbegriff ab. Einige markante Ergebnisse:

1. Für jede Funktion f mit $\int_0^{2\pi} (f(x))^2\,dx < \infty$ (solche Funktionen heißen *quadratisch integrierbare Funktionen* oder *L_2-Funktionen*). gilt

   $$\int_0^{2\pi} (f(x) - S_n(x))^2\,dx \to 0.$$

   Wir sprechen hier von *Konvergenz im quadratischen Mittel* oder von *L_2-Konvergenz.*

2. Ist f stückweise stetig differenzierbare Funktion, so gilt sogar punktweise Konvergenz, d.h.

   $$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x),$$

   außer in den Punkten, in denen f eine Unstetigkeitsstelle hat.

Projekt

1. Stellen Sie die Theorie der Fourier-Reihen kurz vor.

2. Schreiben Sie ein Programm, das zu jeder gegebenen Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ihre Fourierkoeffizienten a_k,b_k berechnet.

3. Visualisieren Sie die Konvergenz der Fouriersumme gegen die Fourierreihe.

4. Betrachten Sie eine unstetige Funktion f, z.B.

$$f(x) = 1_{[0,\pi]}(x).$$

und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Fourierreihe an einer Sprungstelle, Was fällt Ihnen auf (Gibb'sches Phänomen).

2 Zeitreihenanalyse

Theoretischer Hintergrund

Siehe Literatur, z.B. Brockwell & Davis oder Chatfield.

Projekt

(*Dies sind mögliche Themen, die bei Interesse noch konkretisiert werden können. Die Bearbeitung erfordert Grundkenntnisse der Statistik*).

1. Stellen Sie die Theorie kurz dar.
2. Zeigen Sie, wie man mit Hilfe von MuPAD den Trend und eventuelle saisonale Effekte in einer Zeitreihe schätzen kann.
3. Zeigen Sie, wie man mit Hilfe von MuPAD die Autokovarianzen und -korrelationen einer Zeitreihe schätzen kann.
4. Schreiben Sie ein Programm, mit dem die Koeffizienten eines $AR(p)$ Modells

$$X_t = a_0 + a_1\, X_{t-1} + \ldots + a_p\, X_{t-p} + \epsilon_t$$

geschätzt werden können (Kleinste Quadrate Methode, Yule-Walker Schätzer).

5. Zeigen Sie, wie man die Spektraldichte einer Zeitreihe schätzen kann.

3 Dynamische Systeme

Theoretischer Hintergrund

In der Theorie dynamischer Systeme betrachtet man das wiederholte Anwenden ein- und derselben Funktion $f : X \to X$, wobei X eine beliebige Menge ist. Wir definieren die k-te Iterierte $f^{(k)} : X \to X$ der Funktion f rekursiv durch $f^{(1)}$ und

$$f^{(k+1)}(x) = f(f^{(k)}(x)), \quad k \geq 1.$$

Es ist weiter sinnvoll, die 0-te Iterierte festzulegen durch $f^{(0)}(x) = x$.

Das Hauptinteresse gilt dann dem Langzeitverhalten der Folge $(f^{(n)}(x))_{n\geq 0}$ für beliebige Anfangswerte x. Das Verhalten dieser Folge hängt natürlich stark von der Wahl der Funktion f ab. Ein Extremfall sind Kontraktionen, das sind Funktionen, für die es eine Zahl $0 \leq \alpha < 1$ gibt, sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha\, |x - y|, \text{ für alle } x, y \in X.$$

In diesem Fall kann man Folgendes zeigen:

- Es gibt genau einen Fixpunkt der Funktion f, d.h. genau eine Lösung $x_0 \in X$ der Fixpunktgleichung
$$f(x) = x.$$
- Für jedes $x \in X$ konvergiert die Folge $(f^{(n)}(x))_{n\geq 1}$ gegen den Fixpunkt x_0.

Diese sogenannte Fixpunktiteration verwendet man in vielen numerischen Algorithmen. Im Wesentlichen besteht der Trick darin, dass man zu einem gesuchten Objekt x_0 eine geschickte Fixpunktgleichung findet und dann Fixpunktiteration anwendet. (Beispiel: Lösung von Differentialgleichungen nach dem Picard-Lindelöf-Verfahren.)

Während bei Kontraktionen das Langzeitverhalten der Iterierten sehr einfach ist, kann es bei anderen Funktionen beliebig kompliziert werden und kann scheinbar stochastisches Verhalten beobachtet werden (Chaos).

Projekt

- Betrachten Sie folgende Schar von Funktionen $f_\mu : [0,1] \to [0,1]$,
$$f_\mu(x) = \mu\, x\,(1-x),$$
wobei $0 \leq \mu \leq 4$. Begründen Sie, weshalb wir für den Parameter μ genau diesen Bereich genommen haben. Untersuchen Sie für einige Werte von μ das Langzeitverhalten der Folge $(f^{(n)}(x))_{n\geq 1}$. Interessant ist in diesem Fall das Studium der Fixpunkte der Abbildungen f, $f^{(2)}$, $f^{(4)}$, u.s.w.
- Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung, so definieren wir die Abbildung
$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$
Das Newton-Verfahren zur numerischen Bestimmung der Nullstellen der Funktion $g(x)$ erhält man durch Iteration der Abbildung f - bei günstiger Wahl des Anfangswerts x_0 konvergiert die Folge $f^{(n)}(x_0)$ gegen eine Nullstelle von g. Implementieren Sie dies Verfahren und Untersuchen Sie die Konvergenz für einige Funktionen.

4 Räuber-Beute Modelle

Theoretischer Hintergrund

Mit Hilfe von Räuber-Beute-Modellen versucht man zu verstehen, wie es in der Natur zu oszillierenden Populationsgrößen kommen kann. Ein bekanntes Beispiel stellt die Zahl der gefangenen Lüchse in Kanada dar (Canadian Lynx Data), die über einen langen Zeitraum hinweg sehr regelmäßige Oszillationen aufweisen. Um solches Verhalten verstehen zu können, muss man das Wachstum von zwei Populationen gleichzeitig modellieren.

Doch erst zu Modellen für das Wachstum einer einzigen Population. Mit $x(t)$ bezeichnen wir die Größe einer Population zum Zeitpunkt t. Wir sehen mal davon ab, dass $x(t)$ eine diskrete Größe ist und betrachten $x(t)$ als differenzierbare Funktion. Bei Wachstumsmodellen ist es sinnvoll, die *Wachstumsrate* zu studieren. Diese ist definiert durch
$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)},$$

und beschreibt das prozentuale Wachstum der Population per Zeiteinheit. Das einfachste Wachstumsmodell ist *exponentielles Wachstum*; in diesem Modell nimmt man an, dass die Wachstumsrate zeitlich konstant ist. Nennen wir diese Konstante α,so erhalten wir das Modell

$$\dot{x}(t) = \alpha\, x(t).$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$x(t) = x_0\, e^{\alpha\, t}.$$

Dieses Modell ist nur im begrenzten Rahmen realistisch, z.B. bei kleinen Populationen in der Anfangsphase. Ab einem gewissen Moment ist kein Platz mehr für exponentielles Wachstum.

Ein realistischeres Modell geht auf den Belgischen Mathematiker und Biologen Verhulst (1804–1849) zurück. Verhulst nahm an, dass die Wachstumsrate mit zunehmender Populationsgröße linear abnimmt, d.h. dass

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a\,(1 - \frac{x(t)}{b}),$$

wobei $a, b > 0$ Konstanten sind. Hieraus erhält man die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x\,(1 - \frac{x(t)}{b})\, x(t).$$

Diese DGL kann mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen explizit gelöst werden.

Das einfachste Räuber-Beute-Modell geht auf den Italienischen Mathematiker Volterra (1860–1940) zurück, der sich für die Schwankungen der Thunfisch-Population im Mittelmeer interessierte. Im Modell von Volterra, manchmal auch Lotka-Volterra-Modell genannt, gibt es eine Räuber- und eine Beutetier-Population. Das Modell berücksichtigt, dass es den Räubern gut geht, wenn viele Beutetiere anwesend sind, während es bei den Beutetieren genau andersum ist. Im einfachsten Modell hängen die Wachstumsraten der Räuber- und Beutetier-Population linear von der Größe der jeweils anderen Population ab, und zwar mit unterschiedlichem Vorzeichen:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} &= a_1 - b_1\, y(t) \\ \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} &= -(a_2 - b_2\, x(t)), \end{aligned}$$

wobei a_1, a_2, b_1, b_2 positive Konstanten sind. Diese Gleichungen führen auf das folgende DGL-System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a_1 - b_1\, y)\; x \\ \dot{y} &= -\,(a_2 - b_2\, x)\; y. \end{aligned}$$

Das Lotka-Volterra-System kann nicht analytisch gelöst werden; man kann es (a) numerisch lösen, (b) durch Linearisierung eine Näherung an die Lösung in der Umgebung des Gleichgewichtspunkts erhalten und (c) qualitative Aussagen über die Lösung machen.

Durch Einführung neuer Variablen, $u = \frac{b_2}{a_2}\, x$, $v = \frac{b_1}{a_1}\, y$ erhalten wir ein einfacheres DGL-System, nämlich

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a_1\,(1 - v)\, u \\ \dot{v} &= -a_2\,(1 - u)\, v, \end{aligned}$$

das wir in den weiteren Betrachtungen zu Grunde legen wollen.

Projekt

- Lösen Sie die Differentialgleichung des Verhulst-Wachstumsmodells mit Hilfe von MuPAD. Welchen Einfluss haben die Parameter auf die Lösung. Verschaffen Sie sich Daten über das Wachstum der Weltbevölkerung - passt das Modell von Verhulst?

- Lösen Sie das Lotka-Volterra-System numerisch, z.B. mit Hilfe eines Euler-Verfahrens. Stellen Sie Ihr Ergebnis grafisch in der Form einer Zeitreihe für jede der beiden Populationen dar.

- Stellen Sie das Vektorfeld
$$f(u, v) = \begin{pmatrix} a_1(1 - v)\, u \\ -a_2(1 - u)\, v \end{pmatrix}$$
grafisch dar. Eine Lösung des obigen DGL-Systems kann man als Bewegung in diesem Vektorfeld auffassen - die Vektoren geben in jedem Punkt die Richtung an.

- Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte des obigen Vektorfelds, d.h. Punkte (x_0, y_0) mit $f(x_0, y_0) = 0$. Welche Bedeutung haben diese Gleichgewichtspunkte.

- In der Umgebung eines Gleichgewichtspunkts kann man das DGL-System linearisieren und das linearisierte System dann explizit lösen. Führen Sie dies aus.

- Betrachten Sie die Funktion
$$\varphi(x, y) = a_1(\log(v) - v) + a_2(\log(u) - u);$$
Zeigen Sie, dass für jede Lösung des obigen DGL-Systems gilt
$$\phi(u(t), v(t)) \equiv const,$$
d.h. die Lösungen beschreiben Niveaulinien der Funktion φ.

5 Integration über Kurven und Flächen im Raum

Mathematischer Hintergrund

Literatur zur Mathematik II bzw. Vektoranalysis

Projekt

(*Dies sind mögliche Themen, die bei Interesse noch konkretisiert werden können. Die Bearbeitung erfordert Kenntnisse der Vektoranalysis - dies wird üblicherweise in einer Ingenieurmathematik II behandelt oder in der Analysis III*).

- Für eine Reihe von Beispielen Kurven und Flächen im Raum grafisch darstellen. Flächen können als Lösungsmenge einer Gleichung gegeben sein, z.B.
$$\{(x, y, x) \, : \, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1\},$$
oder als parametrisierte Flächen, z.B.
$$F = \{(\cos(\phi), \sin(\phi), z) \, : \, 0 \le \phi \le 2\pi, 0 \le z \le 2\}.$$

- Länge einer Kurve und Oberfläche einer gegebenen Fläche bei einigen Beispielen berechnen.
- Integral eines Vektorfelds längs einer Kurve für Beispiele berechnen.
- Integral einer Funktion über eine Fläche im Raum berechnen.
- Fluss eines Vektorfelds durch eine Fläche berechnen.
- Integralsätze von Gauss, Green und Stokes an Beispielen verifizieren.